

Über das Paulische Äquivalenzverbot.

Von P. Jordan und E. Wigner in Göttingen.

(Eingegangen am 26. Januar 1928.)

Die Arbeit enthält eine Fortsetzung der kürzlich von einem der Verfasser vorgelegten Note „Zur Quantenmechanik der Gasentartung“, deren Ergebnisse hier wesentlich erweitert werden. Es handelt sich darum, ein ideales oder nichtideales, die keinen Bezug nehmen auf den abstrakten Koordinatenraum der Atomgesamtheit des Gases, sondern nur den gewöhnlichen dreidimensionalen Raum benutzen. Das wird ermöglicht durch die Darstellung des Gases vermittelst eines gequantelten dreidimensionalen Wellenfeldes, wobei die besonderen nichtkommutativen Multiplikationseigenschaften der Wellenamplitude gleichzeitig für die Existenz korpuskularer Gasatome und für die Gültigkeit des Paulischen Äquivalenzverbots verantwortlich sind. Die Einzelheiten der Theorie besitzen enge Analogien zu der entsprechenden Theorie für Einsteinsche ideale oder nichtideale Gase, wie sie von Dirac, Klein und Jordan ausgeführt wurde.

§ 1. Schon bei den ersten Untersuchungen zur systematischen Ausbildung der Matrizentheorie der Quantenmechanik ergaben sich Hinweise darauf, daß die bekannten Schwierigkeiten der Strahlungstheorie überwunden werden könnten, indem man nicht nur auf die materiellen Atome, sondern auch auf das Strahlungsfeld die quantenmechanischen Methoden anwendet*. In diesem Sinne sind durch mehrere Arbeiten ** der letzten Zeit Fortschritte erzielt worden einerseits bezüglich einer quantenmechanischen Beschreibung des elektromagnetischen Feldes, andererseits bezüglich einer Formulierung der Quantenmechanik materieller Teilchen, welche die Wellendarstellung im abstrakten Koordinatenraum vermeidet zugunsten einer Darstellung durch quantenmechanische Wellen im gewöhnlichen dreidimensionalen Raum, und welche die Existenz materieller Teilchen in ähnlicher Weise zu erklären sucht, wie durch die Quantelung der elektromagnetischen Wellen die Existenz von Lichtquanten bzw. jeder durch die Annahme von Lichtquanten zu deutende physikalische Effekt erklärt wird.

Man verfährt bei dieser Beschreibung so, daß man diejenige, als q -Zahl aufzufassende Größe N_r , welche in korpuskulärtheoretischer Um-

* M. Born, W. Heisenberg und P. Jordan, ZS. f. Phys. **35**, 557, 1926.

** P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. London (A) **114**, 243, 719, 1927; P. Jordan, ZS. f. Phys. **44**, 473, 1927 (im folgenden als A bezeichnet); P. Jordan und O. Klein, ZS. f. Phys. **45**, 751, 1927; P. Jordan, ZS. f. Phys. **45**, 766, 1927 (im folgenden als B bezeichnet); P. Jordan und W. Pauli jr., ZS. f. Phys. (im Erscheinen).

deutung die Anzahl von Atomen (etwa innerhalb eines Kastens) im r -ten Quantenzustande mißt, in zwei Faktoren

$$N_r = b_r^\dagger b_r \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} b_r &= e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} \theta_r} N_r^{1/2}, \\ b_r^\dagger &= N_r^{1/2} e^{\frac{2\pi i}{\hbar} \theta_r} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

der Form verlegt, wobei man fordert, daß N_r, θ_r kanonisch konjugiert seien.

Legt man nun als Definition kanonisch konjugierter Größen diejenige zugrunde, die von einem der Verfasser kürzlich vorgeschlagen wurde*, so erhält man die Möglichkeit, in dieser Form nicht nur die Einsteinsche Statistik darzustellen, bei der die Eigenwerte N'_r von N_r durch

$$N'_r = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

gegeben sind, sondern auch die Paulische, bei der nur

$$N'_r = 0, 1 \quad (4)$$

in Frage kommt. Man erhält dann ferner sofort neben (2) weitere Gleichungen, und zwar im Einsteinschen Falle

$$\left. \begin{aligned} b_r &= (1 + N_r)^{1/2} e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} \theta_r}, \\ b_r^\dagger &= e^{\frac{2\pi i}{\hbar} \theta_r} (1 + N_r)^{1/2}; \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

aber statt dessen im Paulischen Falle:

$$\left. \begin{aligned} b_r &= (1 - N_r)^{1/2} e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} \theta_r}, \\ b_r^\dagger &= e^{\frac{2\pi i}{\hbar} \theta_r} (1 - N_r)^{1/2}, \end{aligned} \right\} \quad (5'')$$

wie in A gezeigt wurde.

Diese Formeln stützen bereits sehr die Überzeugung, daß diese Darstellungswweise des Paulischen Äquivalenzverbotes dem Wesen der Sache entspricht und in ihrer weiteren Verfolgung zu richtigen Ergebnissen führen wird. Die Formeln (5), (5'') stehen nämlich in enger Beziehung einerseits zu den Problemen der stoßartigen Wechselwirkungen von Körperteilen, und andererseits zu den Dichteschwankungen quantenmechanischer Gase.

§ 2. Was zunächst die Wechselwirkungen betrifft, so mag es erlaubt sein, aus einer früheren Note folgendes zu wiederholen*: In einem abgeschlossenen Kasten mögen (endlich oder unendlich viele) Arten verschiedener Teilchen (materielle oder Lichtquanten) vorhanden sein. Die Dichte der l -ten Teilchenart pro Zelle im Phasenraum sei $n^l(E)$, wo E die zu den betrachteten Zellen gehörige Energie bedeutet. Die Gesamtzahlen N^l [Integrale der $n^l(E)$ über den Phasenraum] seien beliebig vielen ($j = 1, 2, \dots$) linearen Nebenbedingungen

$$\sum_l C_l^j N^l = C^j = \text{const} \quad (6)$$

unterworfen (Beispiele dazu a. O.), wo die C_l^j ganze positive oder negative Zahlen (oder Null) sind. Dann wird im statistischen Gleichgewicht

$$n^l(E) = \frac{1}{e^{\int C_l^j a_j(T) + \frac{E}{kT}} + 1}, \quad (7)$$

wobei das positive oder negative Vorzeichen in ± 1 zu wählen ist, je nachdem, ob die l -te Teilchenart dem Pauliprinzip oder der Einsteinstatistik gehorcht.

Als Wechselwirkungsprozesse sind nun natürlich nur solche zuzulassen, bei denen die Forderungen (6) nicht verletzt werden. Eine bestimmte Form eines solchen Elementaraktes ist zu beschreiben durch Angabe der Indizes l und der Geschwindigkeiten der vor dem Elementarakt vorhandenen und der nach dem Prozeß vorhandenen mitwirkenden Teilchen. Es seien $n_1^+, n_2^+, \dots, n_r^+$ die zugehörigen Dichten $n^l(E)$ für diejenigen vor dem Prozeß vorhandenen Teilchen, welche der Einsteinstatistik folgen; und $n_1^-, n_2^-, \dots, n_s^-$ die $n^l(E)$ für die vor dem Prozeß vorhandenen mitwirkenden Teilchen Paulischer Art. Entsprechend sollen sich $m_1^+, m_2^+, \dots, m_q^+$; $m_1^-, m_2^-, \dots, m_o^-$ auf die nach dem Prozeß übrigbleibenden bzw. neu erzeugten Teilchen beziehen. Dann muß aus statistisch-thermodynamischen Gründen die Wahrscheinlichkeit des Elementaraktes proportional mit

$$\begin{aligned} &n_1^+ n_2^+ \dots n_r^+ n_1^- n_2^- \dots n_s^- (1 + m_1^+) (1 + m_2^+) \dots \\ &\dots (1 + m_q^+) (1 - m_1^-) (1 - m_2^-) \dots (1 - m_o^-) \end{aligned} \quad (8)$$

angenommen werden; die des inversen Elementarakts entsprechend proportional mit

* P. Jordan, ZS. f. Phys. 41, 711, 1927. Anmerkung nach Abschluß der Arbeit: Dieselben Formeln sind kürzlich von Bothe, ZS. f. Phys. 46, 327, 1928, erneut erörtert worden.

* P. Jordan, ZS. f. Phys. 44, 1, 1927.

Bezüglich der Faktoren $(1 - m^\dagger)$ usw. bei den Einsteinschen Teilchen ist nun von Dirac bei der Untersuchung der Absorption und Emission von Licht durch Atome gezeigt worden, daß ihre Gestalt unmittelbar folgt aus der Gestalt der entsprechenden Faktoren in den Formeln (5'). Entsprechend wird die Form der Glieder $(1 - m_r)$ usw. in (8), (9) auf (5'') zurückzuführen sein.

Was andererseits die Schwankungsscheinungen anbetrifft, so ist in A darauf hingewiesen, daß das Schwankungssquadrat der Teilchendichte in einem Volumen, welches mit einem großen Volumen bezüglich der zu einem engen Frequenzintervall $\Delta\nu$ gehörigen Wellen kommuniziert, nach den bekannten Einsteinschen Formeln einen Wert proportional zu

$$(10) \quad n_r(1 + n_r);$$

Von klassische Wellen wäre es proportional n_r^2 . Die von Pauli berechnete analoge Größe bei einem Fermischen Gase ist aber proportional

$$(10'') \quad n_r(1 - n_r);$$

und in (10'), (10'') zeigt sich der Unterschied vom Einsteinschen und Paulischen Gase wieder in derselben Form wie in (5'), (5'').

Von dem Einsteinschen Gas bzw. dem Boseschen Wellenfeld besitzt man auf Grund der Arbeiten, die auf S. 631 genannt wurden, bereits eine weitgehende Kenntnis. Wir beschäftigen uns im folgenden damit, in ähnlicher Weise die in A begründete Theorie des Pauligases zu vertiefen.

§ 3. Wir wiederholen hier der Deutlichkeit halber einige in A gebrachte Formeln. Die Größen $b_r, b_r^\dagger, N_r, \Theta_r$ sind darstellbar durch die Matrizen

$$(11) \quad \begin{aligned} b_r &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_r; & b_r^\dagger &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_r; \\ N_r &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_r; & \Theta_r &= \frac{\hbar}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_r. \end{aligned}$$

Hierbei ist jeweils

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}_r$$

eine Matrix, deren Zeilen und Spalten bezeichnet werden durch eine Reihe von Indizes, deren jeder den Wert 0 oder 1 haben kann; und zwar ist (12) eine Diagonalmatrix in bezug auf den ersten bis $(r-1)$ -ten Index und in bezug auf den $(r+1)$ -ten und die folgenden Indizes.

Neben den schon in § 1 besprochenen Gleichungen gelten die Formeln:

$$\left. \begin{aligned} b_r^\dagger b_r &= N_r; & b_r b_r^\dagger &= 1 - N_r; \\ N_r^2 &= N_r; & (b_r^\dagger)^2 &= (b_r)^2 = 0; \\ e^{\frac{2\pi i}{\hbar} \Theta_r} &= i \frac{4}{\hbar} \Theta_r. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Man kann alle diese Größen ausdrücken durch drei Größen $k_1^{(r)}, k_2^{(r)}, k_3^{(r)}$, die den Multiplikationsregeln der Quaternionen folgen:

$$\left. \begin{aligned} k_1^{(r)} k_2^{(r)} &= -k_3^{(r)}; & k_1^{(r)} k_3^{(r)} &= k_2^{(r)}, \\ \dots &\dots & \dots &\dots \\ (k_1^{(r)})^2 &= (k_2^{(r)})^2 = (k_3^{(r)})^2 = -1, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

wobei durch die Punkte die beiden aus der angeschriebenen Gleichung durch zyklische Permutation der 1, 2, 3 hervorgehenden Gleichungen angedeutet sein sollen.

$$\left. \begin{aligned} \text{Nämlich:} \\ b_r &= -\frac{i k_2^{(r)} - k_3^{(r)}}{2}, & b_r^\dagger &= -\frac{i k_3^{(r)} + k_2^{(r)}}{2}; \\ N_r &= -\frac{i k_1^{(r)} - 1}{2}; & \Theta_r &= -\frac{\hbar}{4} i k_3^{(r)}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Die Quaternionen $k_1^{(r)}, k_2^{(r)}, k_3^{(r)}$ werden dabei selbst dargestellt durch die Matrizen

$$k_1^{(r)} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}_r; \quad k_2^{(r)} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}_r; \quad k_3^{(r)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}_r. \quad (16)$$

§ 4. Ebenso wie in B für die Boesche Statistik ausgeführt wurde kann man auch bei der Fermischen Statistik die Heisenberg-Diracschen Determinantenformeln für die Herleitung der antisymmetrischen Schrödingerschen Eigenfunktionen des Gesamtsystems aus denen eines Einzelatoms übertragen auf beliebige Wahrscheinlichkeitsamplituden. Eine solche Amplitude sei für ein Einzelatom gegeben durch

$$\Phi_{ap}^{\beta q} = \Phi_{ap}(\beta', q). \quad (17)$$

Um die Vorzeichen der aus ihr zu bildenden Determinanten eindeutig zu machen, legen wir für die Eigenwerte β' von β in beliebiger, aber ein für allemal bestimmter Weise eine Reihenfolge fest. Wir bezeichnen die so definierte Anordnung für zwei spezielle Eigenwerte β', β'' von β durch $\beta' < \beta''$ bzw. $\beta'' < \beta'$, ohne jedoch mit dem Zeichen $<$ notwendig die Bedeutung „kleiner als“ zu verbinden. Genau so verfahren wir mit den Eigenwerten q' von q und allgemein mit den Eigenwerten Q' jeder

meßbaren Größe Q beim Einzelatom. Danach kann man jeder Amplitude (17) für das Einzelatom in eindeutiger Weise eine antisymmetrische Amplitude $\Psi_{\alpha p}^{\beta q}$ für ein System von N energetisch ungekoppelten Teilchen zuordnen. Wir schreiben

$$\Psi_{\alpha p}^{\beta q} = \Psi_{\alpha p}(\beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \dots, \beta^{(N)}; q^{(1)}, q^{(2)}, \dots, q^{(N)}), \quad (18)$$

worin

$$\begin{aligned} \beta^{(1)} &< \beta^{(2)} < \dots < \beta^{(N)}, \\ q^{(1)} &< q^{(2)} < \dots < q^{(N)} \end{aligned} \quad (19)$$

sein soll; und dann:

$$\Psi_{\alpha p}^{\beta q} = \frac{1}{N!} \sum_{(n)} \varepsilon_n \prod_{k=1}^N \Phi_{\alpha p}(\beta^{(k)}, q^{(n_k)}), \quad (20)$$

wo die Summe über alle $N!$ Permutationen n_1, n_2, \dots, n_N der Zahlen 1, 2, ..., N zu erstrecken ist, während ε_n gleich +1 ist für gerade Permutationen und -1 für ungerade.

Nach (20) verschwindet $\Psi_{\alpha p}^{\beta q}$, sobald zwei der Größen $\beta^{(k)}$ einander gleich werden. Das heißt physikalisch: Es kommt nicht vor, daß irgend eine nichtentartete Größe β bei zwei verschiedenen Teilchen des Systems gleichzeitig denselben Wert annimmt. Wählen wir für β insbesondere das System der Quantenzahlen, so gibt dieser Satz das Paulische Äquivalenzverbot in seiner ursprünglichen Fassung. Wir wollen im folgenden das gleichzeitige Bestehen dieses Satzes für alle Größen β als den eigentlichen Inhalt des Paulischen Äquivalenzverbots betrachten.

Wir beschäftigen uns übrigens im folgenden vorwiegend mit dem Falle, daß jede Größe β am Einzelatom nur endlich viele, sagen wir K , Eigenwerte hat. Nur gelegentlich werden wir näher hinweisen auf den Grenzübergang $K \rightarrow \infty$, der im allgemeinen keinerlei Schwierigkeit macht. Wir wollen die K Eigenwerte jeder Größe β numerieren mit $\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_K$, und zwar so, daß die oben vorausgesetzte Anordnung der Eigenwerte gerade die Form

$$\beta'_1 < \beta'_2 < \dots < \beta'_K \quad (21)$$

gewinnt.

§ 5. Die in solcher Weise definierten antisymmetrischen Amplituden sind nun in eindeutiger Weise darstellbar als Funktion von Argumenten

$$N'(\beta'); N'(q') \quad (22)$$

mit folgender Bedeutung: $N'(\beta')$ ist die Anzahl von Atomen, bei denen β den Wert β' hat; ist also β' ein diskreter Eigenwert, so ist nach dem allgemeinen Paulischen Äquivalenzverbot

$$N'(\beta') = 0 \text{ oder } 1. \quad (23)$$

Liegt dagegen β' in einem kontinuierlichen Eigenwertgebiet, so haben wir zu schreiben:

$$N'(\beta') = \sum_{k=1}^{N'} \delta(\beta' - \beta'_k), \quad (24)$$

wenn insgesamt N' Teilchen vorhanden sind; das Integral von $N'(\beta')$ über ein Teilstück des Eigenwertgebietes ist dann die Anzahl der Atome, bei denen die Werte von β in dieses Teilstück fallen.

Wir begnügen uns aber nicht mit der rein mathematischen Einführung der neuen Größen $N'(\beta'), N'(q')$, sondern gehen zu einer neuen physikalischen Theorie über, indem wir annehmen, das Gasmengas sei ein System, das durch ein kanonisches System von g -Zahlgrößen

$$N(\beta'); \Theta(\beta') \quad (25)$$

beschrieben werden kann, wobei die $N'(\beta')$ gerade die Eigenwerte von $N(\beta')$ darstellen. Dann sind die $N(\beta'), \Theta(\beta')$ in der in § 3 erläuterten Weise durch Matrizen darzustellen; den verschiedenen Eigenwerten β' entsprechen die verschiedenen Werte der in § 3 gebrauchten Indizes r, s . Insbesondere gilt für diskretes β' die Gleichung

$$N(\beta').[1 - N(\beta')] = 0, \quad (26)$$

für nicht diskretes β' kann man statt dessen schreiben:

$$N(\beta').[\delta(\beta' - \beta'') - N(\beta'')] = \begin{cases} N(\beta') N(\beta'') & \text{für } \beta' \neq \beta'', \\ 0 & \text{für } \beta' = \beta'' \end{cases} \quad (27)$$

Während nun die g -Zahlen $N(\beta')$ durch ihre physikalische Bedeutung völlig definiert sind, ist dasselbe natürlich nicht der Fall für die $\Theta(\beta')$, wenn wir von ihnen nur verlangen, daß sie kanonisch konjugiert zu den $N(\beta')$ seien. Man muß diese Nichteindeutigkeit natürlich beschränken, wenn man eindeutige Relationen zwischen den Größen $N(\beta'), \Theta(\beta')$ und $N(q'), \Theta(q')$ erhalten will. Wir werden nun im weiteren Verlauf unserer Betrachtungen sehen: Man kann, nachdem für jede Größe β , q usw. in der oben besprochenen Weise eine Reihenfolge der Eigenwerte β' und q' usw. festgelegt ist, ein gewisses System von konjugierten Phasen $\Theta(\beta'), \Theta(q')$ usw. zu den $N(\beta'), N(q')$ usw. bestimmen derart, daß einfache und eindeutige Relationen zwischen den verschiedenen kanonischen Systemen $N(\beta'), \Theta(\beta');$ $N(q');$ $\Theta(q')$ usw. entstehen. Man hat dabei aber noch verschiedene Möglichkeiten für die Definition der $\Theta(\beta')$ zu den $N(\beta')$, und diese verschiedenen Möglichkeiten können eindeutig zugeordnet werden den verschiedenen konjugierten Impulsen α zu β . Wir bezeichnen

war in A versuchsweise die räumliche Teilchendichte der Wellenkorpuskeln definiert durch

$$\begin{aligned} N(x) &= \psi^\dagger \psi, \\ \psi &= \sum_{r=1}^{\infty} b_r \sin r \frac{\pi}{l} x, \end{aligned} \quad (54)$$

wo $N_r = b_r^\dagger b_r$ die Anzahl von Teilchen im r -ten Quantenzustand der Translation bedeutet.

Wir haben jetzt (55) zu korrigieren, indem wir die b_r durch entsprechende a_r ersetzen:

$$\psi = \sum_{r=1}^{\infty} a_r \sin r \frac{\pi}{l} x. \quad (56)$$

Die in A durchgeföhrte Berechnung der Dichteschwankungen kann aber sofort von (56) auf (56) übertragen werden und zeigt dann, daß (56), wie es sein muß, wirklich die richtige Formel liefert. Es wurde nämlich aus (55) erhalten, daß der fragliche quadratische Mittelwert $\overline{J^2}$ proportional sei mit

$$\overline{b_r^\dagger b_r \cdot b_r b_r^\dagger} = \overline{N_r} \cdot (1 - \overline{N_r}), \quad (57)$$

wo die Querstriche die Mittelung über ein infinitesimales Frequenzgebiet im Anschluß an die Frequenz ν_r bedeuten, so daß sich die in § 2 erwähnte Formel

$$\overline{J^2} = \text{const.} \cdot n_r (1 - n_r) \quad (58)$$

ergibt. Rechnet man nun entsprechend mit (56), so wird $\overline{J^2}$ proportional mit

$$\overline{a_r^\dagger a_r \cdot a_r a_r^\dagger} = \overline{N_r} \cdot (1 - \overline{N_r}), \quad (59)$$

d. h. das Endergebnis bleibt ungeändert.

§ 8. Wir wollen nun den in § 6 angekündigten vollständigen Beweis für die Äquivalenz der Formeln (30 a) mit den Formeln der gewöhnlichen Darstellung im mehrdimensionalen Koordinatenraum antreten. Wir müssen uns in diesem Koordinatenraum auf solche Größen (Operatoren) beschränken, die symmetrisch in den gleichen Teilchen sind; außerdem aber beschränken wir uns in diesem Paragraphen auf Größen, die aus einer Summe bestehen, wo in jedem Summand nur ein Elektron vorkommt. Von dieser Art ist die Energie eines idealen Gases. Diese Operatoren haben also die Gestalt

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_N, \quad (60)$$

wo die V_i immer dieselbe Größe darstellen, nur an verschiedenen (am 1-, 2-, ..., N -ten) Teilchen gemessen.

Unsere Wellenfunktion dagegen wird [§ 5, Gleichung (22), (23)] von den $N'(\beta'_k)$ abhängen. Dies erscheint in der Tat vom Standpunkt der Quantenmechanik als der naturgemäße Ansatz, da ja ein „maximaler Versuch“ — wegen der Gleichheit der Teilchen — immer nur bestimmten kann, wie viele Teilchen im Zustand $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_K$ sind, während die Frage, in welchem Zustand ein bestimmtes Elektron ist, nicht entschieden werden kann. Im Sinne des Paulischen Äquivalenzverbotes haben wir in (23) den Wertebereich der $N'(\beta_k)$ auf 0,1 beschränkt.

Wir nehmen nun noch, wie in § 4 bereits betont, der Einfachheit halber an (was in Wahrheit niemals erfüllt ist), daß ein Elektron nur endlich viele (sagen wir K) Zustände annehmen kann, die wir also mit $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_K$ bezeichnen. Dann hat die im folgenden einzuführende Wellenfunktion $\Psi(N'(\beta_1), N'(\beta_2), \dots, N'(\beta_K))$ gerade K Argumente und ist für $2K$ Wertesysteme der Argumente definiert. Der Grenzübergang $K \rightarrow \infty$ scheint keine wesentlichen Schwierigkeiten zu bieten.

Die nun folgenden Betrachtungen lassen sich am einfachsten ausführen, wenn man den Zustand eines einzelnen Elektrons im mehrdimensionalen Koordinatenraum mit einer Wellenfunktion beschreibt, deren Argument β' ist. Das bedeutet, daß beim Einzelelektron die Messung eben die Bestimmung der Größe β ist, deren Wertebereich also K Zahlen $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_K$ umfaßt.

Haben wir nun im mehrdimensionalen Koordinatenraum eine antisymmetrische Wellenfunktion von N' Elektronen

$$\Psi(\beta'^1, \beta'^2, \dots, \beta'^{N'}), \quad (61)$$

so bestimmen wir, daß wir diesen Zustand fortan in unserem neuen N -Raume durch die Wellenfunktion $\Psi(N'(\beta_1), N'(\beta_2), \dots, N'(\beta_K))$ beschreiben wollen. Dabei sei

$$\Psi(N'(\beta'_1), \dots, N'(\beta'_K)) = \frac{1}{\sqrt{N'!}} \Psi(\beta'^1, \dots, \beta'^{N'}). \quad (62)$$

Diese Gleichung ist so zu verstehen, daß Ψ überall 0 ist, wo nicht genau N von den $K(K > N)$ Zahlen $N'(\beta'_1), \dots, N'(\beta'_K)$ gleich 1, die übrigen gleich 0 sind. Um den Wert an diesen Stellen zu bestimmen, setzt man rechts für die $\beta'^1, \beta'^2, \dots, \beta'^{N'}$ jene Werte ein, für die eben $N'(\beta'_i) = 1$ ist, und zwar für β'^1 dem (im Sinne der in § 4 getroffenen Anordnung) ersten, für β'^2 den folgenden, ..., für $\beta'^{N'}$ den letzten.

Wir wollen an dieser Zuordnung einer Funktion

$$\Psi(N'(\beta_1), N'(\beta_2), \dots, N'(\beta_K))$$

im neuen N -Raume zu einer Funktion

$$\psi(\beta'^1, \beta'^2, \dots, \beta'^N)$$

im mehrdimensionalen Koordinatenraume im folgenden immer (also auch, wenn ψ keine Wellenfunktion ist) festhalten. Es ist zu beachten, daß es für das Vorzeichen von Ψ wichtig ist, in ψ die $\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_K$ in der einmal festgesetzten Reihenfolge

$$(\beta'_1 < \beta'_2 < \dots < \beta'_K)$$

einsetzen, da nur dadurch das Vorzeichen von Ψ eindeutig geregelt wird; und nur hierdurch ist die Zuordnung einer eindeutigen Funktion Ψ zu der Funktion ψ möglich.

Umgekehrt wird aber auch ψ durch Ψ eindeutig bestimmt*: an den Stellen, für welche $\beta'^1 < \dots < \beta'^N$ gilt, durch (62), überall sonst durch die Forderung der Antisymmetrie.

Die einzelnen Teile (z. B. V_1) des Operators V [Gleichung (60)] im mehrdimensionalen Koordinatenraum sind im wesentlichen hermitische Matrizen von K Zeilen und K Spalten. In der ν -ten Zeile und μ -ten Spalte stehe $H_{\nu\mu}$. Dann ist der ganze Operator V mit der Matrix

$$H_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_N; \mu_1 \mu_2 \dots \mu_N} = H_{\nu_1 \mu_1} \delta_{\nu_2 \mu_2} \delta_{\nu_3 \mu_3} \dots \delta_{\nu_N \mu_N} + \dots + \delta_{\nu_1 \mu_1} \delta_{\nu_2 \mu_2} \delta_{\nu_3 \mu_3} \dots \delta_{\nu_N \mu_N} \quad (63)$$

identisch. Wir schreiben zur Abkürzung

$$V \psi(\beta'^1 \dots \beta'^N) = \bar{\psi}(\beta'^1 \dots \beta'^N), \quad (64)$$

dann ist also

$$\bar{\psi}(\beta'_{\nu_1} \dots \beta'_{\nu_N}) = \sum_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N=1}^K H_{\nu_1 \dots \nu_N; \mu_1 \dots \mu_N} \psi(\beta'_{\mu_1} \dots \beta'_{\mu_N}). \quad (65)$$

Aus diesem $\bar{\psi}(\beta'^1, \beta'^2, \dots, \beta'^N)$ bilden wir — genau wie in (62) — ein $\bar{\Psi}(N'(\beta'_1), \dots, N'(\beta'_K))$ durch

$$\bar{\Psi}(N'(\beta'_1), \dots, N'(\beta'_K)) = \bar{\psi}(\beta'^1, \dots, \beta'^N) \frac{1}{\sqrt{N'!}}. \quad (62a)$$

Wir behaupten nun, daß

$$\bar{\Psi}(N'(\beta'_1), \dots, N'(\beta'_K)) = \Omega \Psi(N'(\beta'_1), \dots, N'(\beta'_K)), \quad (66)$$

wo der Operator Ω

$$\Omega = \sum_{x, z=1}^K H_{xz} a_x^\dagger a_z \quad (66a)$$

ist, mit den a aus (31).

$$\begin{aligned} N'(\beta'_1, N'(\beta'_2), \dots, N'(\beta'_N)) \\ (\text{also genau } N') \text{ gleich 1 sind, ist } \sqrt{N'!} \bar{\Psi} \text{ gleich} \\ \bar{\psi}(\beta'_1, \dots, \beta'_N), \\ \text{also gleich} \\ \sum_{\mu_1 \dots \mu_N=1}^K H_{\nu_1 \dots \nu_N; \mu_1 \dots \mu_N} \psi(\beta'_{\mu_1}, \dots, \beta'_{\mu_N}) \\ = \sum_{\mu_1=1}^K H_{\nu_1 \mu_1} \psi(\beta'_{\mu_1}, \beta'_{\nu_2}, \dots, \beta'_{\nu_N}) + \sum_{\mu_2=1}^K H_{\nu_2 \mu_2} \psi(\beta'_{\nu_1}, \beta'_{\mu_2}, \dots, \beta'_{\mu_N}) + \\ \dots + \sum_{\mu_N=1}^K H_{\nu_N \mu_N} \psi(\beta'_{\nu_1}, \beta'_{\nu_2}, \dots, \beta'_{\mu_N}) \\ = \sum_{r=1}^{N'} \sum_{\mu=1}^K H_{\nu_r \mu} \psi(\beta'_{\nu_1}, \beta'_{\nu_2}, \dots, \beta'_{\nu_{r-1}}, \beta'_{\mu}, \beta'_{\nu_{r+1}}, \dots, \beta'_{\mu_N}), \end{aligned} \quad (67)$$

das zweite ersetzt man aus (63). Unsere Absicht ist nun, die rechte Seite von (67) durch die Ψ auszudrücken. Zu diesem Zwecke bemerken wir, daß in (67) rechts die β'_i schon in der richtigen Reihenfolge stehen, nur das jeweils auftretende β'_μ ist an der falschen Stelle. Ist etwa * $\beta'_{i_s-1} < \beta'_\mu \leqq \beta'_{i_s}$, so können wir die Reihenfolge der β' zur richtigen machen, indem wir β'_μ über die zwischenliegenden β'_i von der Stelle zwischen β'_{i_s-1} und β'_{i_s+1} an die Stelle zwischen β'_{i_s-1} und β'_{i_s} verschieben. Dabei multipliziert sich die antisymmetrische Funktion ψ mit $(-1)^z$, wo z die Anzahl der zwischen den beiden angegebenen Stellen stehenden β_i ist.

Wir können (67) also auch schreiben

$$\bar{\psi}(\beta'_1, \dots, \beta'_N) = \sum_{r=1}^{N'} \sum_{\mu=1}^K H_{\nu_r \mu} \psi(\beta'_{\nu_1}, \dots, \beta'_{\mu}, \dots, \beta'_{\mu_N}), \quad (67a)$$

* Wir setzen voraus, daß Ψ wieder überall verschwindet, wo nicht $N'(\beta'_1) + \dots + N'(\beta'_K) = N'$ ist. Das Gleichheitszeichen kommt nicht in Frage, da dann das entsprechende ψ doch verschwindet.

wo natürlich noch das Vorzeichen \pm von r und μ abhängt, aber schon schreibt, wie man leicht überlegt. In den Summanden nämlich, in (67a), wo $i_r \neq \mu$ ist [erstes Glied in (68)], sind dieselben Argumente vorhanden wie an der linken Seite, es fehlt nur β'_{i_r} , was links vorhanden war ($x_j = 1$), dagegen ist β'_{μ} hinzugekommen, und wir können annehmen, daß es nicht da war ($x_i = 0$), da sonst ψ doch verschwinden würde. Ist $i_r = \mu$ [zweites Glied in (68)], so sind rechts in ψ dieselben Argumente wie links.

Das Vorzeichen in (68) bestimmt sich offenbar dadurch, daß man $+$ oder $-$ setzt, je nachdem zwischen der ausgeschriebenen 0 und 1 eine gerade oder ungerade Anzahl von 1 steht. (Über ebenso viele β'_i müßte man das entsprechende β'_{μ} hinüberschieben.) Dies ist aber die Anzahl der 1, die links von x_l stehen, vermindert um die Anzahl der 1, die links von x_j stehen.

Obwohl jetzt die Richtigkeit der vorangehenden Formeln schon klar ist, wollen wir diese Gedanken doch zu Ende führen. Wir wissen, daß der Wertbereich der Argumente von Ψ insgesamt 2^K Stellen umfaßt, indem für jedes der $x_k = N'(\beta'_k)$ entweder +1 oder 0 gesetzt werden kann. Ein darauf wirkender linearer Operator ist also eine Matrix mit 2^K Zeilen und ebensoviel Spalten. Wir bezeichnen jede Zeile oder Spalte mit K Indizes (den x_1, \dots, x_K entsprechend), die jeweils 1 oder 0 sein können.

Der Operator a_1 ist entsprechend § 3 und § 6 zu definieren (wir schreiben der besseren Übersicht halber die Indizes als Argumente) durch

$$\begin{aligned} a_1(x_1, x_2, \dots, x_K; y_1, y_2, \dots, y_K) \\ = (-1)^{x_1+x_2+\dots+x_K-1} \delta_{x_1 y_1} \delta_{x_2 y_2} \dots \delta_{x_K y_K} \delta_{x_1-1 y_1-1} \delta_{x_2-1 y_2-1} \dots \delta_{x_K-1 y_K-1} \delta_{x_{K+1} y_{K+1}} \delta_{x_{K+2} y_{K+2}} \dots \delta_{x_{2^K} y_{2^K}} \quad (69) \end{aligned}$$

* Wir setzen aus Bequemlichkeitsgründen x_k für $N'(\beta'_k)$.

Mit Hilfe dieser Formeln kann (68) auch so geschrieben werden:

$$\overline{\Psi}(x_1, \dots, x_K) = \sum_{x_j=1}^K \sum_{x_l=0}^0 H_{j,l} \sum_{y_1 \dots y_K=0,1} a_1^\dagger(x_1 \dots x_K; y_1 \dots y_K) \cdot a_1(y_1 \dots y_K; z_1 \dots z_K) \Psi(z_1 \dots z_K). \quad (70)$$

Wie man sich mit einiger Mühe überlegen kann, was aber schwer hingeschrieben werden kann. Damit ist (66) gewonnen.

§ 9. Wir haben also in § 8 folgendes gesehen: Jeder antisymmetrischen Funktion, welche definiert ist in den Koordinatenräumen mit allen Anzahlen $N' < K$ von Dimensionen, entspricht durch (62) eine Funktion im neuen Raum. Es entspricht dann dem Operator (60) $V = V_1 + V_2 + \dots + V_N$ [mit der Matrix in (64) $H_{r_1 \dots r_N'; u_1 \dots u_N'}$] im Koordinatenraum der Operator Ω von (68) im neuen N' -Raum. Der Operator Ω ist dabei

$$+ \sum_{x_j=1}^K H_{j,l} a_x^\dagger a_x \quad (66a)$$

mit den a_x^\dagger, a_x von (69), (69 a).

Es folgt hieraus, daß einer Eigenfunktion von V eine Eigenfunktion von Ω entspricht. Wenn wir noch zeigen können, daß das innere Produkt zweier Funktionen im Koordinatenraum denselben Wert hat wie dasjenige der entsprechenden Funktionen im neuen N' -Raum, so sind wir mit dem Beweis fertig. Im Koordinatenraum ist

$$(\psi \varphi) = \sum_{\beta'_K}^{\beta'_K} \psi(\beta'^1 \dots \beta'^N) \tilde{\varphi}(\beta'^1 \dots \beta'^N), \quad (71)$$

was wegen der Antisymmetrie

$$(\psi \varphi) = N! \sum_{\substack{\beta'^1, \dots, \beta'^N = \beta'_1 \\ \beta'^1 < \beta'^2, \dots, \beta'^N < \beta'_N}} \psi(\beta'^1 \dots \beta'^N) \tilde{\varphi}(\beta'^1 \dots \beta'^N) \quad (72)$$

ergibt. Andererseits gilt im neuen Raum

$$(\Psi \Phi) = \sum_{x_1 \dots x_K=0,1} \Psi(x_1 \dots x_K) \tilde{\Phi}(x_1 \dots x_K), \quad (73)$$

was mit Rücksicht auf (62) eben (72) ist.

Wir möchten noch bemerken, daß die q -Zahlrelationen (36), (40) natürlich sofort aus der Formel (69) hervorgehen.

§ 10. Wir müssen schließlich Operatoren betrachten, die keine Zerlegung mehr in die Gestalt (60) gestatten. Von dieser Form ist die

Energie eines nichtidealen Gases. Wir beschränken uns dabei zunächst auf solche, die in Teile zerlegbar sind, die jeweils nur zwei, stets verschiedene, Teilchen enthalten. Die Erledigung dieser Aufgabe ergibt sich durch Analogisierung der entsprechenden Formeln für die Bose-Einstein'sche Statistik*. Der Operator V läßt sich dann schreiben:

$$V = \sum_{\substack{j, k=1 \\ j < k}}^{N'} V_{jk}, \quad (60b)$$

wobei V die Matrix

$$H_{\nu_1 \dots \nu_{N'}} \mu_1 \dots \mu_N' \\ = \sum_{\substack{j, k=1 \\ j < k}}^{N'} H_{\nu_k \mu_j; \mu_j \mu_k} \delta_{\nu_1 \mu_1} \dots \delta_{\nu_{j+1} \mu_{j-1}} \delta_{\nu_j + 1 \mu_{j+1}} \dots \delta_{\nu_{k-1} \mu_{k-1}} \delta_{\nu_k + 1 \mu_k + 1} \dots \delta_{\nu_{N'} \mu_{N'}}, \quad (63b)$$

entspricht. Es ist dann

$$V\psi(\beta'^1, \dots, \beta'^N) = \bar{\psi}(\beta'^1, \dots, \beta'^N) \quad (64b)$$

mit Hilfe von (63b) [ebenso wie (65)] zu berechnen. Dann ist wieder die „richtige Reihenfolge“ der β auf der rechten Seite herzustellen. Dabei können die β'_i stehengelassen bleiben, β'_μ und β'_ν müssen über eine Anzahl von β'_i hinübergeschoben werden, wobei sich wieder das Vorzeichen ändern kann.

Beachten wir wieder (62), so können wir wieder links und rechts für $\bar{\psi}$ bzw. ψ einsetzen Ψ bzw. Ψ . Unter Beachtung von (69) findet man nun, daß dem Operator (60b) nummehr der Operator

$$\frac{1}{2!} \sum_{\substack{j_1, j_2=1 \\ z_1, z_2=1}}^K H_{z_1 z_2; \lambda_1 \lambda_2} a_{z_1}^\dagger a_{z_2} a_{\lambda_2}^\dagger a_{\lambda_1} \quad (66b)$$

entspricht.

Es ist befriedigend, daß die Rückwirkung der Teilchen auf sich selbst wieder durch die nichtkommutativen Multiplikationseigenschaften der Wellenamplituden im dreidimensionalen Raum automatisch ausgeschlossen wird. Im Bose-Einstein'schen Falle wurde dieser Umstand deutlich gemacht durch Formel (40) der Arbeit von Jordan und Klein. Daß dieselbe Formel auch hier gilt, folgt aus der leicht beweisbaren Formel

$$a_k^\dagger a_l^\dagger a_l - a_k^\dagger a_l^\dagger a_l a_k = \delta_{kl} a_k^\dagger a_k.$$

Wir wenden uns endlich zu dem Fall von Operatoren, die aus Summanden bestehen, welche jeweils in $n > 2$ Teilchen symmetrisch sind,

* P. Jordan und O. Klein, a. a. 0.

während in der Summe alle diejenigen Summanden auszulassen sind, welche dasselbe Teilchen zweimal enthalten (was eine Wechselwirkung des Teilchens mit sich selbst bedeuten würde). Eine Verallgemeinerung der obigen Betrachtungen führt dann zu den folgenden Formeln, welche analog sind der in B angegebenen Verallgemeinerung* der Formel von Jordan und Klein:

$$\frac{1}{n!} \sum_{\substack{j_1, j_2, \dots, j_n=1 \\ z_1, z_2, \dots, z_n=1}}^K H_{z_1 \dots z_n; \lambda_1 \dots \lambda_n} a_{z_1}^\dagger \dots a_{z_n}^\dagger a_{\lambda_1} \dots a_{\lambda_n}. \quad (66c)$$

§ 11. Wir können endlich die erhaltenen Ergebnisse in einer etwas anderen Form so aussprechen: Es gilt bei einem Paulischen Mehrkörperproblem eine Wahrscheinlichkeitsamplitude, welche die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmt, daß, nachdem für die messbaren Größen $N(\beta'_1), N(\beta'_2), \dots, N(\beta'_K)$ ein gewisses Wertesystem $N'(\beta'_1), N'(\beta'_2), \dots, N'(\beta'_K)$ gemessen worden ist, für die anderen, entsprechend definierten Größen $N(q_1), N(q'_2), \dots, N(q'_K)$ die Werte $N'(q_1), N'(q_2), \dots, N'(q'_K)$ gefunden werden.

Eine solche Amplitude wird erhalten durch

$$\Phi_{-\theta_\alpha(\beta'), -\theta_p(\gamma')}^{N(\beta'), N(q')} = 0 \quad \text{für } \sum_{\beta'} N'(\beta') \neq \sum_{\gamma'} N'(\gamma')$$

und

$$\Phi_{-\theta_\alpha(\beta'), -\theta_p(\gamma')}^{N(\beta'), N(q')} = N'! \Psi_{\alpha p}^{\beta' q} \quad \text{für } \sum_{\beta'} N'(\beta') = \sum_{\gamma'} N'(\gamma'), \quad (74)$$

wobei $\Phi_{\alpha p}^{\beta' q}, \Psi_{\alpha p}^{\beta' q}$ die in § 4 besprochenen Funktionen sind.

Die in A in der Form

$$\left\{ \sum_{rs} H_{rs} b_r^\dagger b_s - W \right\} \Phi = 0$$

angegebene Funktionalgleichung für die zum Gesamtsystem gehörige Amplitude Φ lautet nunmehr bei unserer Vorzeichenbestimmung der in Φ enthaltenen Determinanten:

$$\left\{ \sum_{rs} H_{rs} a_r^\dagger a_s - W \right\} \Phi = 0;$$

diese Änderung ist nötig, weil in A die Vorzeichenweideutigkeit dieser Determinanten nicht ausreichend berücksichtigt wurde; die Matrizen a_r unterscheiden sich, wie wir wissen, von den b_r , nur bezüglich der Vorzeichen ihrer verschiedenen Elemente. Es scheint sehr befriedigend, daß die für die Bildung des Energieausdrucks notwendige Einführung der

* Vgl. B, Formel (34).

Größen a, a^\dagger gleichzeitig auch zu einfachen Multiplikationsgesetzen führte, wie wir in § 6 gesehen haben.

Es sei endlich hervorgehoben, daß die in § 6 erörterten Multiplikationsgesetze der gequantelten Amplituden $a_p (q)$ in Analogie zu den von Jordan und Pauli entwickelten relativistisch invarianten Multiplikationsregeln des ladungsfreien elektromagnetischen Feldes leicht relativistisch verallgemeinert werden können, so daß man die dem Paulischen Äquivalenzverbot entsprechende Quantelung der de Broglieschen Wellen in relativistisch invarianter Form erhält. Eine genauere Darlegung soll jedoch vorläufig zurückgestellt werden.

Zusatz bei der Korrektur: Zwischen den $2K$ Operatoren $a_1, a_2, \dots, a_K; a_1^\dagger, a_2^\dagger, \dots, a_K^\dagger$ bestehen die Relationen

$$\begin{cases} a_x a_i + a_i a_x = 0 \\ a_x^\dagger a_i^\dagger + a_i^\dagger a_x^\dagger = 0 \end{cases} \quad (36)$$

$$a_x^\dagger a_i + a_i a_x^\dagger = \delta_{xi}. \quad (40)$$

Wir wollen nun zeigen, daß diese ψ -Zahlrelationen die Operatoren a, a^\dagger schon eindeutig bestimmen, wenn man sich auf irreduzible Matrzensysteme beschränkt und Matrzensysteme, die auseinander durch Ähnlichkeitstransformation hervorgehen, als nicht verschieden voneinander ansieht*. Um dies einzusehen, bilden wir zunächst folgende Größen

$$\begin{cases} \alpha_x = a_x + a_x^\dagger, \\ \alpha_{K+x} = \frac{1}{i} (a_x - a_x^\dagger). \end{cases} \quad (1)$$

Die $2K$ Matrizen α bestimmen umgekehrt die a eindeutig. Nun gilt für die α_x allgemein

$$\alpha_x a_i + a_i \alpha_x = 2 \delta_{xi}. \quad (II)$$

Man überzeugt sich z. B., wenn $x < K, i < K$ ist, daß

$$\alpha_x \alpha_i + \alpha_i \alpha_x = (a_x + a_x^\dagger) \cdot (a_i + a_i^\dagger) + (a_i + a_i^\dagger) \cdot (a_x + a_x^\dagger) = 2 \delta_{xi}.$$

Man kann (II) auch schreiben

$$\begin{cases} \alpha_x^2 = 1 \\ \alpha_x \alpha_i = -1 \quad \text{für } x \neq i \end{cases} \quad (IIa)$$

was aber mit anderen Worten so viel bedeutet, daß die $2K$ Matrizen α zusammen mit der Matrix -1 eine Gruppe aufspannen. Wenn z. B. $K = 2$ ist, so hat diese Gruppe folgende Elemente

$$\left\{ \begin{array}{l} 1; \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4; \quad \alpha_1 \alpha_2, \alpha_1 \alpha_3, \alpha_2 \alpha_3, \alpha_3 \alpha_4; \\ -1; \quad -\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3, -\alpha_4; \quad -\alpha_1 \alpha_2, -\alpha_1 \alpha_3, -\alpha_2 \alpha_3, -\alpha_3 \alpha_4; \\ \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3, \quad \alpha_1 \alpha_3 \alpha_4, \quad \alpha_1 \alpha_2 \alpha_4, \quad \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4; \\ -\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3, -\alpha_1 \alpha_3 \alpha_4, -\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4, -\alpha_1 \alpha_3 \alpha_4. \end{array} \right\} \quad (III)$$

Das sind 32 Elemente, im allgemeinen 2^{2K+1} Elemente. Das irreduzible Matrzensystem, das (II) genügt, ist sicher eine irreduzible Darstellung dieser Gruppe (umgekehrt braucht es nicht der Fall zu sein, die Isomorphie kann ja mehrstufig sein). Wir werden nur die irreduziblen Darstellungen bestimmen.

Unsere Gruppe hat den Normalteiler $1, -1$ (das Zentrum), ihre Faktorgruppe vom Grade 2^{2K} ist abelsch. Sie hat also 2^{2K} dieser Abelschen Faktorgruppe entsprechende irreduzible Darstellungen vom Grade 1 , die auch Darstellungen der ganzen Gruppe sind. Indessen kommen sie für uns nicht in Betracht, da sie den Gleichungen II nicht genügen (da sie ja kommutativ sind).

Wie viele Klassen hat unsere Gruppe? Die beiden Elemente 1 und -1 bilden je eine Klasse für sich, sonst ist aber jedes Element R mit $-1 \cdot R$ in einer Klasse. Besteht nämlich R in (III) aus einer ungeraden Anzahl von Faktoren, so ist $\alpha R \alpha^{-1} = -1 \cdot R$, wenn α in R nicht enthalten ist, wenn R aus einer geraden Anzahl von Faktoren besteht, ist $\alpha R \alpha^{-1} = -1 \cdot R$, wenn α in R enthalten ist. Die Anzahl der Klassen ist also 2^{2K+1} ; dies ist auch die Anzahl der voneinander verschiedenen irreduziblen Darstellungen. Da wir 2^{2K} Darstellungen schon kennen und diese nicht für uns in Betracht kommen, kann es nur eine einzige, die letzte sein, die die Gleichungen (II) befriedigt, alle anderen Lösungen von (II) gehen daraus durch Ähnlichkeitstransformation hervor.

Wir bestimmen noch die Anzahl von Zeilen und Spalten, die Dimension dieser Darstellung. (Es muß dabei natürlich 2^K herauskommen.) In der Tat ist der Grad der Gruppe 2^{2K+1} gleich der Summe der Quadrate der Dimensionen ihrer Darstellungen. Es haben 2^K die Dimension 1 , die letzte muß die Dimension 2^K haben, damit $(2^K)^2 + 2^{2K} \cdot 1^2 = 2^{2K+1}$. Sie stimmt also tatsächlich mit unserem Matrzensystem (69) oder § 3 und 6 überein.

Göttingen, Institut für theoretische Physik.

* Dies ist die Transformation aller Matrizen a durch dieselbe Matrix S kanonische Transformation der Matrizedarstellung.